multi-vector physics

소새 사람 김진학(ginacdl@gmail.com)

이 책에서는 잘 알려진 Electromagnetic tensor 대신에 multi-vector와 $curl$을 사용하여 Maxwell's equations을 유도한다. $curl$은 differential form의 exterior derivatives와 매우 비슷하다. 이 과정에서 vector potential(A, φ), 전기장, 자기장, 전하, 전류밀도, 등이 차원이 다른 multi-vector임을 알게 된다.

그리고 같은 방법으로 vector potential(field)의 차원을 확장하면 전자기력, 약력, 강력, 중력에 대한 확장된 Maxwell's equations 를 유도할 수 있다. 아울러 질량, 전하, spin, color, Higgs 에 대해서도 차원과 특성을 알 수 있다.

전자기장의 에너지밀도에서 힘을 바로 구할 수 있다. 전자기력 $F = \rho E + J \times B$과 시간에 대한 힘 $F_t = -J \cdot E$ 즉 Joule heating 까지 한 번에 구해진다. 그리고 약력이 왜 약력인지 알 수 있다. 물론 중력과 강력도 구한다.

놀랍게도 4 차원에서 muti-vector 는 16 원수(sedenion)이다. 어렵지 않다. 읽고 나면 물리량을 해석하는 도구가 될 것이다.

차례

1. multi-vector
2. curvilinear coordinates system
3. curl
4. four vector fields
5. sedenion
6. energy density and force

1 multi-vector

이 책에서 vector 는 multi-vector 를 의미한다. multi-vector 는 여러 개의 기존 1-vector 를 편의상 기호인 wedge(∧)로 product 하여 얻어진다. $v_1, v_2, \dots, v_r$ 가 기존의 1-vector 라면, $(v_1 \wedge v_2)$는 2-vector 이고 $(v_1 \wedge v_2 \wedge v_3)$는 3-vector 이다.

A. anti-symmetry

vector 는 wedge product 의 순서를 바꾸면 부호가 바뀐다. anti-commutative

$$(v_1 \wedge v_2) = -(v_2 \wedge v_1), \qquad (v_1 \wedge v_1) = 0$$

$$(v_1 \wedge v_2 \wedge v_3) = \varepsilon_{ijk}(v_i \wedge v_j \wedge v_k), \qquad i,j,k = 1,2,3, \qquad \varepsilon_{ijk}: Levi - Civita\ symbol$$

…

B. dot product

vector 의 dot product 는 교환법칙이 성립한다. a, b, c 가 1-vector 라면,

$$a \cdot (v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_r)$$

$$= (-1)^{i-1}(a \cdot v_i)(v_1 \wedge \dots \wedge \check{v}_i \wedge \dots \wedge v_r), \qquad \check{v}_i: v_i\ skip, \qquad Einstein\ summation$$

$$= (v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_r) \cdot a$$

ex) $a \cdot (v_1 \wedge v_2 \wedge v_3)$

$$= (a \cdot v_1)(v_2 \wedge v_3) - (a \cdot v_2)(v_1 \wedge v_3) + (a \cdot v_3)(v_1 \wedge v_2)$$

$$(a \wedge b) \cdot (v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_r) = b \cdot \{a \cdot (v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_r)\}$$

ex) $(a \wedge b) \cdot (v_1 \wedge v_2 \wedge v_3) = b \cdot \{a \cdot (v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_r)\}$

$$= b \cdot \{(a \cdot v_1)(v_2 \wedge v_3) - (a \cdot v_2)(v_1 \wedge v_3) + (a \cdot v_3)(v_1 \wedge v_2)\}$$

$$= \{(a \cdot v_1)(b \cdot v_2) - (a \cdot v_2)(b \cdot v_1)\}v_3 - \{(a \cdot v_1)(b \cdot v_3) - (a \cdot v_3)(b \cdot v_1)\}v_2$$

$$+\{(a \cdot v_2)(b \cdot v_3) - (a \cdot v_3)(b \cdot v_2)\}v_1$$

위의 식에서 a와 b를 서로 바꾸거나, a와 b가 같다면, 다음 성질도 알 수 있다.

$$(a \wedge b) \cdot (v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_r) = -(b \wedge a) \cdot (v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_r)$$

$$b \cdot \{a \cdot (v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_r)\} = -a \cdot \{b \cdot (v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_r)\}$$

$$(a \wedge a) \cdot (v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_r) = a \cdot \{a \cdot (v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_r)\} = 0$$

$$(a \wedge b \wedge c) \cdot (v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_r) = c \cdot [b \cdot \{a \cdot (v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_r)\}]$$

$$= c \cdot \{(a \wedge b) \cdot (v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_r)\} = (b \wedge c) \cdot \{a \cdot (v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_r)\}$$

$w_1, w_2, \ldots, w_r$도 1-vector 라면,

$$(w_1 \wedge w_2 \wedge \ldots \wedge w_r) \cdot (v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_r) = \left|\left(v_i \cdot w_j\right)\right| = det\left(v_i \cdot w_j\right)$$

C. dual vector

n 차원 공간에서 Cartesian coordinates basis $e_1, e_2, \ldots, e_n$로 이루어진 n-vector 를 단위 pseudoscalar I 라 한다. 다른 coordinates basis 로의 변환도 가능하다.

$$I = e_1 \wedge e_2 \ldots \wedge e_n$$

$v = (v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_r)$이라면, dual vector of v, v^d를 다음처럼 정의한다.

$v^d = v \cdot I$ 특별히 $I^d = 1$, $1^d = I$이다.

v와 v^d는 서로 수직하고 1:1 이다.

$$v \cdot v^d = (v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_r) \cdot \{(v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_r) \cdot I\}$$

$$=(v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_r \wedge v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_r) \cdot I = 0$$

예를 들어 3 차원 공간에서

$$I = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3, \qquad e_1^d = e_1 \cdot I = e_1 \cdot (e_1 \wedge e_2 \wedge e_3) = e_2 \wedge e_3$$

$e_2 \wedge e_3$을 실체적으로 e_2과 e_3로 만드는 평면이라고 생각한다면, e_1은 그 평면에 수직한 vector 이다. duality 는 projective geometry 에서, pseudoscalar 는 geometric algebra 에서 쓰는 용어이다.

2 curvilinear coordinates system

미분 가능한 임의의 n 차원 공간 좌표계이다. 점의 좌표는 $P(p^1, p^2, \dots, p^n)$이고, 원점 O에서 P까지의 vector 를 의미한다.

A. basis

$P(p^1, p^2, \dots, p^n)$에서 basis u_i는 다음처럼 정의한다.

$$u_i = \frac{\partial P}{\partial p^i}$$

B. reciprocal basis

$u^i \cdot u_j = \delta^i_j$일 때 $u^1, u^2 \dots u^n$가 P에서 reciprocal basis 이다. 행렬 g^{ij}와 g_{jk}를 가정하여 그 점의 u^i는 u_j로, u_i는 u^j로 표현할 수 있다.

$$u^i = g^{ij}u_j, \qquad u^i \cdot u^k = g^{ij}u_j \cdot u^k = g^{ik}$$

$$u_i = g_{ij}u^j, \qquad u_i \cdot u_k = g_{ij}u^j \cdot u_k = g_{ik}$$

여기서, g_{jk}와 g^{ij}는 역행렬 관계이다.

$$u^i \cdot u_k = g^{ij}u_j \cdot u_k = g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k$$

따라서, P에서 basis 들을 구하고, 행렬 $g_{ij} = u_i \cdot u_j$을 구하고, 역행렬 g^{ij}을 구하면 그 점의 u^i을 구할 수 있다.

C. infinitesimal volume $[dV]_r$

$[dV]_r$은 r-vector 이다. 실체적으로는 아주 작은 r 차원의 평행육면체 같은 것을 의미한다. 기준 꼭지점은 $P(p^1, p^2, \dots, p^n)$이다.

$$[dV]_r = \left(u_{\sigma_1} \wedge u_{\sigma_2} \wedge \dots \wedge u_{\sigma_r}\right) dp^{\sigma_1} dp^{\sigma_2} \dots dp^{\sigma_r}$$

$$\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r\} \subset \{1,2,\dots,n\}, \qquad (\sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_r)$$

기준이 되는 r 개의 모서리가 $u_{\sigma_1}dp^{\sigma_1}, u_{\sigma_2}dp^{\sigma_2}, \dots, u_{\sigma_r}dp^{\sigma_r}$이다.

ex) $[dV]_3 = (u_1 \wedge u_3 \wedge u_4) dp^1 dp^3 dp^4$

D. $\partial[dV]_r$, boundary of $[dV]_r$

$[dV]_r$의 표면에 있는 2r 개의 (r-1)-vector 경계(boundary, border)가 $\partial[dV]_r$이다.

$$\partial[dV]_r = \frac{\pm u^i}{dp^i}\cdot[dV]_r = \begin{cases} \frac{+u^i}{dp^i}\cdot[dV]_r & at\ P(\dots, p^i + dp^i, \dots) \\ \frac{-u^i}{dp^i}\cdot[dV]_r & at\ P(\dots, p^i, \dots) \end{cases}$$

E. examples of $\partial[dV]_r$

ex) $[dV]_1 = u_2 dp^2$

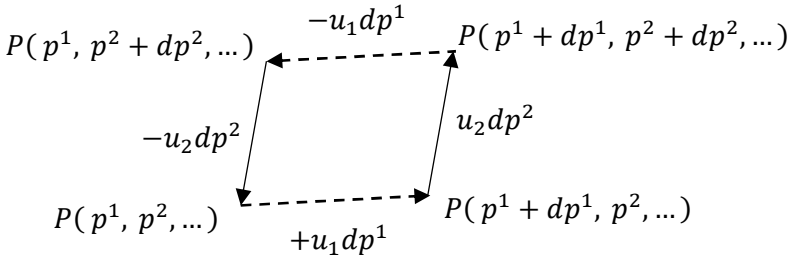
$$\partial[dV]_1 = \frac{\pm u^i}{dp^i}\cdot[dV]_1 = \begin{cases} \frac{+u^2}{dp^2}\cdot[dV]_1 & at\ P(\dots, p^2 + dp^2, \dots) \\ \frac{-u^2}{dp^2}\cdot[dV]_1 & at\ P(\dots, p^2, \dots) \end{cases}$$

$$P(\dots, p^2, \dots)_{-1} \xrightarrow{u_2 dp^2} {}^{+1}P(\dots, p^2 + dp^2, \dots)$$

$\partial[dV]_1$는 ± 1이다. 인접한 다른 $[dV]_1$의 경계와 부호가 반대이다. 적분할 때 상쇄된다.

ex) $[dV]_2 = (u_1 \wedge u_2)dp^1 dp^2$

$$\partial[dV]_2 = \frac{\pm u^i}{dp^i}\cdot[dV]_2 = \begin{cases} \frac{+u^1}{dp^1}\cdot(u_1 \wedge u_2)dp^1 dp^2 = +u_2 dp^2 & at\ P(\dots, p^1 + dp^1, \dots) \\ \frac{-u^1}{dp^1}\cdot(u_1 \wedge u_2)dp^1 dp^2 = -u_2 dp^2 & at\ P(\dots, p^1, \dots) \\ \frac{+u^2}{dp^2}\cdot(u_1 \wedge u_2)dp^1 dp^2 = -u_1 dp^1 & at\ P(\dots, p^2 + dp^2, \dots) \\ \frac{-u^2}{dp^2}\cdot(u_1 \wedge u_2)dp^1 dp^2 = +u_1 dp^1 & at\ P(\dots, p^2, \dots) \end{cases}$$



$\partial[dV]_2$는 한 방향으로 돈다. 그래서 $curl$이다. 인접한 다른 $\partial[dV]_2$와는 반대 방향이다. 적분할 때 상쇄된다. Stokes's theorem 을 유도할 수 있다.

3 curl

n 차원 공간에서 r-vector field A

ex) 3-vector field $A = A_{ijk}(u^i \wedge u^j \wedge u^k),\ (i<j<k)$

$curl(A)$의 정의는 수식 그 차체이다.

$$A \cdot \partial[dV]_r = A \cdot \left(\frac{\pm u^i}{dp^i} \cdot [dV]_r\right) = \left(\frac{\pm u^i}{dp^i} \wedge A\right) \cdot [dV]_r = \left(u^i \wedge \frac{A}{\partial p^i}\right) \cdot [dV]_r$$

$$= curl(A) \cdot [dV]_r\,, \qquad curl(A) = u^i \wedge \frac{A}{\partial p^i}$$

적분하면 Stokes's theorem 이다.

$$\oint A \cdot \partial[dV]_r = \oint curl(A) \cdot [dV]_r$$

calculus 에서 vector field 는 reciprocal basis 로 써라. 그러면 dot product 로 basis 가 상쇄된다. 그리고 A의 계수만 미분해서 $curl(A)$를 구해라. 이미 Cartesian coordinates 에서는 reciprocal basis 를 쓴다. covariant derivative 는 사족이다.

A. $curl^2(A) = 0$

$$curl^2(A) = curl\{curl(A)\}$$

$$= u^j \wedge u^i \wedge \frac{\partial^2 A}{\partial p^j \partial p^i} = u^i \wedge u^j \wedge \frac{\partial^2 A}{\partial p^i \partial p^j} = -u^j \wedge u^i \wedge \frac{\partial^2 A}{\partial p^j \partial p^i} = 0$$

A 와 $curl(A)$가 모두 0 이 아니면 $curl^2(A)$도 없지만 $curl(B) = A$인 B도 없다.
$curl^2(B) = 0 = curl(A) \neq 0$. A 와 $curl(A)$ 이 둘은 두 차원에 걸친 한 존재이다.

B. example of curl

잘 알려진 spherical coordinates 의 vector field $A = A_r \mathbb{e}_r + A_\theta \mathbb{e}_\theta + A_\emptyset \mathbb{e}_\emptyset$로 $curl$의 정의를 확인해보자. 그러려면 먼저 $\mathbb{e}_r, \mathbb{e}_\theta, \mathbb{e}_\emptyset$를 curvilinear coordinates basis $u^r, u^\theta, u^\emptyset$로 바꾸어 계산하고 결과를 다시 $\mathbb{e}_r, \mathbb{e}_\theta, \mathbb{e}_\emptyset$로 환산해서 확인하면 된다.

$$p^1 = r, \qquad p^2 = \theta, \qquad p^3 = \emptyset$$

$$u_r = \frac{\partial P}{\partial r} = \mathbb{e}_r, \qquad u_\theta = \frac{\partial P}{\partial \theta} = r\mathbb{e}_\theta, \qquad u_\emptyset = \frac{\partial P}{\partial \emptyset} = r\sin\theta\, \mathbb{e}_\emptyset$$

$$u^r \cdot u_r = u^\theta \cdot u_\theta = u^\emptyset \cdot u_\emptyset = 1, \qquad u^r = \mathbb{e}_r, \qquad u^\theta = \frac{\mathbb{e}_\theta}{r}, \qquad u^\emptyset = \frac{\mathbb{e}_\emptyset}{r\sin\theta}$$

$$A = A_r \mathbb{e}_r + A_\theta \mathbb{e}_\theta + A_\emptyset \mathbb{e}_\emptyset = A_r u^r + A_\theta r u^\theta + A_\emptyset r\sin\theta\, u^\emptyset$$

항이 많으므로 $(u^\theta \wedge u^\emptyset)$ 항만 계산해보자.

$$curl(A) = u^i \wedge \frac{A}{\partial p^i}$$

$$u^\theta \wedge \frac{\partial(A_\emptyset r\sin\theta)}{\partial\theta}u^\emptyset + u^\emptyset \wedge \frac{\partial(A_\theta r)}{\partial\emptyset}u^\theta = \left\{\frac{\partial(A_\emptyset r\sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial(A_\theta r)}{\partial\emptyset}\right\}(u^\theta \wedge u^\emptyset)$$

$$= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left\{\frac{\partial(A_\emptyset r\sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial(A_\theta r)}{\partial\emptyset}\right\}(e_\theta \wedge e_\emptyset)$$

관행적 결과와 계수는 같다. 하지만 e_r 항이 아니라 $(e_\theta \wedge e_\emptyset)$ 항이라는 것이다. 이 둘은 서로 dual basis 이다. 다행히 우리는 이 둘을 구분하지 못했다.

C. divergence

$divergence(A)$는 A^d에 대한 $curl$이다.

$$div(A) = curl(A^d), \qquad A^d = A \cdot I$$

D. example of divergence

같은 vector field $A = A_r e_r + A_\theta e_\theta + A_\emptyset e_\emptyset$를 예로 들자. 3 차원에서

$$A = A_r e_r + A_\theta e_\theta + A_\emptyset e_\emptyset = A_r u_r + \frac{A_\theta}{r}u_\theta + \frac{A_\emptyset}{r\sin\theta}u_\emptyset$$

$$I = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 = e_r \wedge e_\theta \wedge e_\emptyset = r^2\sin\theta\,(u^r \wedge u^\theta \wedge u^\emptyset)$$

$$A^d = A \cdot I = \left(A_r u_r + \frac{A_\theta}{r}u_\theta + \frac{A_\emptyset}{r\sin\theta}u_\emptyset\right)\cdot r^2\sin\theta\,(u^r \wedge u^\theta \wedge u^\emptyset)$$

$$= A_r r^2\sin\theta\,(u^\theta \wedge u^\emptyset) - A_\theta r\sin\theta\,(u^r \wedge u^\emptyset) + A_\emptyset r(u^r \wedge u^\theta)$$

$$div(A) = curl(A^d) = u^i \wedge \frac{\partial A^d}{\partial p^i}$$

$$= \left\{\frac{\partial(A_r r^2\sin\theta)}{\partial r} + \frac{\partial(A_\theta r\sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial(A_\emptyset r)}{\partial\emptyset}\right\}(u^r \wedge u^\theta \wedge u^\emptyset)$$

$$= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left\{\frac{\partial(A_r r^2\sin\theta)}{\partial r} + \frac{\partial(A_\theta r\sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial(A_\emptyset r)}{\partial\emptyset}\right\}(e_r \wedge e_\theta \wedge e_\emptyset)$$

역시 관행적 결과와 계수는 같지만, 다른 점은 scalar 항이 아니라 $I = (e_r \wedge e_\theta \wedge e_\emptyset)$ 항이라는 것이다. 이 둘도 서로 dual basis 이다.

E. $div(A) = 0$

$$div(A)\cdot[dV]_r = curl(A^d)\cdot[dV]_r = A^d \cdot \partial[dV]_r = (A\cdot I)\cdot\partial[dV]_r$$

$$= (A \wedge \partial[dV]_r)\cdot I$$

엄밀하지는 않지만, $(A \wedge \partial[dV]_r) \cdot I$는 $[dV]_r$의 테두리 $\partial[dV]_r$를 통해서 A만큼의 크기로 드나드는 어떤 물리량의 크기를 의미한다. $A \wedge \partial[dV]_r$에는 $\partial[dV]_r$와 $\partial[dV]_r$에 수직한 A 성분만 곱해진다. $\partial[dV]_r$에 평행한 A 성분은 wedge product(∧)로 상쇄된다. 거기에 I를 dot product 한 값이 $div(A) \cdot [dV]_r$이다.

만약 모든 점에서 $div(A) = 0$이라면, 어떤 물리량이 쌓이거나 새지 않고 흐른다는 뜻이다. 이 때 A를 연속이라 한다.

4 four vector fields

A. postulate

vector field A가 물리적 의미를 갖으려면 아래 조건이 필요하다.

1) vector field 는 두 차원에 걸친 한 존재이다. A와 $curl(A)$가 존재해야 한다.

2) vector field A는 연속이다. $div(A) = 0$.

3) $curl^d(A)$도 존재한다. duality. $curl(A)$에 대한 dual 차원의 존재이다.
새로운 존재가 아니라 동전의 뒷면 같은 것이다.

4) 그리고 1)과 같은 이유로 $curl\{curl^d(A)\} = div\{curl(A)\} = Lap(A) = J$도 존재한다.
Lap은 Laplacian 을 의미한다.

5) $curl^d(A)$도 연속이다.
$div\{curl^d(A)\} = curl\{curl^d(A)\}^d = \pm curl^2(A) = 0$ 부호는 차원에 따라 다르다.

6) 다음 두 식은 $curl$의 성질이다.
$curl^2(A) = 0,$ $curl(J) = curl\{Lap(A)\} = curl^2\{curl^d(A)\} = 0$

C. possible four vector fields

시간을 포함하는 4 차원에서 위 가정을 만족하는 vector field 는 다음 네 가지이다. 여러 차원의 vector field 가 섞여 존재해도 된다. 읽기 쉽게 차원마다 글꼴을 다르게 쓴다.

1-vector field A

$$A = A_1\mathbb{e}^1 + A_2\mathbb{e}^2 + A_3\mathbb{e}^3 + A_t\mathbb{e}^t$$

2-vector field $(\mathcal{B} + \mathcal{E})$

$$\mathcal{B} + \mathcal{E} = \mathcal{B}_1(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) + \mathcal{B}_2(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1) + \mathcal{B}_3(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)$$
$$+\mathcal{E}_1(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) + \mathcal{E}_2(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t) + \mathcal{E}_3(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)$$

3-vector field $\mathbb{A}$

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}_1(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) + \mathbb{A}_2(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) + \mathbb{A}_3(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t) + \mathbb{A}_t(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)$$

scalar field $\mathscr{v}$

$$\mathscr{v}$$

단지 위 조건들만으로 다음 장에서 1-vector field A에서 Maxwell's equations 을 유도한다. 나머지 차원의 vector field 에 대해서도 같은 작업을 반복하고 그 결과를 해석한다. 각자 Electromagnetic tensor 방식과 비교해보기 바란다.

B. Minkowski space

Cartesian coordinates 로 쓴다. $P(x^1, x^2, x^3, x^4 = t)$. basis $\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2, \mathbb{e}_3, \mathbb{e}_t$와 reciprocal basis $\mathbb{e}^1, \mathbb{e}^2, \mathbb{e}^3, \mathbb{e}^t$의 관계는 다음과 같다.

$$\mathbb{e}_i = \frac{\partial P}{\partial x^i}, \qquad \mathbb{e}_4 = \frac{\partial P}{\partial x^4} = \frac{\partial P}{\partial t} = \mathbb{e}_t, \qquad i, j = 1,2,3$$

$$\mathbb{e}_i \cdot \mathbb{e}_j = \delta_{ij}, \qquad \mathbb{e}^i \cdot \mathbb{e}_j = \delta^i_j, \qquad \mathbb{e}^i = \mathbb{e}_i$$

$$\mathbb{e}_t \cdot \mathbb{e}_t = \mathbb{e}^t \cdot \mathbb{e}^t = -1, \qquad \mathbb{e}^t \cdot \mathbb{e}_t = 1, \qquad \mathbb{e}^t = -\mathbb{e}_t$$

단위 pseudoscalar $I = \mathbb{e}_1 \wedge \mathbb{e}_2 \wedge \mathbb{e}_3 \wedge \mathbb{e}_t = -\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t$

편미분 표기

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \qquad \partial_{\mu\nu} = \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu}, \qquad \mu, \nu = 1,2,3,4$$

$$\square = \partial_{tt} - \partial_{11} - \partial_{22} - \partial_{33}, \qquad d'Alembert\ operator$$

4.1 1-vector field

다시 한번 vector field 는 reciprocal basis 로 표현하는 게 좋다.

$$A = A_1 \mathbb{e}^1 + A_2 \mathbb{e}^2 + A_3 \mathbb{e}^3 + A_t \mathbb{e}^t = A^1 \mathbb{e}_1 + A^2 \mathbb{e}_2 + A^3 \mathbb{e}_3 + A^t \mathbb{e}_t$$

$$A_i = A^i, \qquad A_t = -A^t = -\varphi$$

A. $curl(A)$

$$curl(A) = \mathbb{e}^\mu \wedge \partial_\mu A = B + E, \qquad \mu = 1,2,3,4$$

$$= (\partial_2 A_3 - \partial_3 A_2)(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) + (\partial_3 A_1 - \partial_1 A_3)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1) + (\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1)(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)$$

$$+(\partial_1 A_t - \partial_t A_1)(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) + (\partial_2 A_t - \partial_t A_2)(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t) + (\partial_3 A_t - \partial_t A_3)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)$$

$$= B_1(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) + B_2(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1) + B_3(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2) + E_1(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) + E_2(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t) + E_3(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)$$

$$B: magnetic\ field, \qquad E: elctric\ field$$

B. $curl^2(A) = 0$

$$curl^2(A) = \mathbb{e}^\mu \wedge \partial_\mu \{curl(A)\}$$

$$= (\partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 + \partial_3 B_3)(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) + (\partial_2 E_3 - \partial_3 E_2 + \partial_t B_1)(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)$$

$$+(\partial_3 E_1 - \partial_1 E_3 + \partial_t B_2)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) + (\partial_1 E_2 - \partial_2 E_1 + \partial_t B_3)(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t) = 0$$

Faraday's law, 아래 관행적 표현은 1-vector 항이지만, 실제는 3-vector 항이다.

$$\nabla \cdot B = 0, \qquad \nabla \times E + \partial_t B = 0$$

C. $div(A) = 0$

$$A^d = A \cdot I = -A_1(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) - A_2(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) - A_1(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t) - A_t(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)$$

$$div(A) = curl\{A^d\} = \mathbb{e}^\mu \wedge \partial_\mu A^d = (\partial_1 A_1 + \partial_2 A_2 + \partial_3 A_3 - \partial_t A_t) I$$

Lorentz condition, 실제는 pseudoscalar 항이다.

$$\nabla \cdot A + \partial_t \varphi = 0$$

D. $Lap(A) = J$

$$curl^d(A) = curl(A) \cdot I$$

$$= E_1(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) + E_2(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1) + E_3(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2) - B_1(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) - B_2(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t) - B_3(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)$$

$$Lap(A) = \mathbb{e}^\mu \wedge \partial_\mu \{curl^d(A)\} = J$$

$$= (\partial_1 E_1 + \partial_2 E_2 + \partial_3 E_3)(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) - (\partial_2 B_3 - \partial_3 B_2 - \partial_t E_1)(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)$$

$$-(\partial_3 B_1 - \partial_1 B_3 - \partial_t E_2)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) - (\partial_1 B_2 - \partial_2 B_1 - \partial_t E_3)(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t)$$

$$= -J_t(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) - J_1(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) - J_2(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) - J_3(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t)$$

$$J_t = -\rho: charge\ density, \qquad J_i: current\ density$$

Gauss's law 와 Ampère–Maxwell law, 실제는 3-vector 항이다.

$$\nabla \cdot E = -J_t = \rho, \qquad \nabla \times B = J + \partial_t E$$

E. particle and wave

앞의 식의 E_i, B_j 를 A_μ 로 치환하자. (4.1A 와 4.1C)

$$-J_t = \partial_1 E_1 + \partial_2 E_2 + \partial_3 E_3 = \partial_{11} A_t - \partial_{1t} A_1 + \partial_{22} A_t - \partial_{2t} A_2 + \partial_{33} A_t - \partial_{3t} A_3$$

$$= \partial_{11} A_t + \partial_{22} A_t + \partial_{33} A_t - \partial_{tt} A_t - \partial_t(\partial_1 A_1 + \partial_2 A_2 + \partial_3 A_3 - \partial_t A_t)$$

$$= \partial_{11} A_t + \partial_{22} A_t + \partial_{33} A_t - \partial_{tt} A_t = -\Box A_t$$

$$J_1 = \partial_2 B_3 - \partial_3 B_2 - \partial_t E_1 = \partial_{21} A_2 - \partial_{22} A_1 - \partial_{33} A_1 + \partial_{31} A_3 + \partial_{tt} A_1 - \partial_{t1} A_t$$

$$= \partial_{tt} A_1 - \partial_{11} A_1 - \partial_{22} A_1 - \partial_{33} A_1 + \partial_1(\partial_1 A_1 + \partial_2 A_2 + \partial_3 A_3 - \partial_t A_t) = \Box A_1$$

$$J_t = \Box A_t \qquad J_1 = \Box A_1 \qquad J_2 = \Box A_2 \qquad J_3 = \Box A_3$$

F. $curl(J) = 0$

$$curl(J) = \mathbb{e}^\mu \wedge \partial_\mu J = (\partial_1 J_1 + \partial_2 J_2 + \partial_3 J_3 - \partial_t J_t) I = 0$$

conservative law, 실제는 pseudoscalar 항이다.

$$\nabla \cdot J + \partial_t \rho = 0$$

중요한 것은 multi-vector 를 사용한 점이다. 이제 vector field 의 차원을 확장해보자.

4.2 2-vector field

$$\mathcal{B}+\mathcal{E}=\mathcal{B}_1(\mathbb{e}^2\wedge\mathbb{e}^3)+\mathcal{B}_2(\mathbb{e}^3\wedge\mathbb{e}^1)+\mathcal{B}_3(\mathbb{e}^1\wedge\mathbb{e}^2)$$
$$+\mathcal{E}_1(\mathbb{e}^1\wedge\mathbb{e}^t)+\mathcal{E}_2(\mathbb{e}^2\wedge\mathbb{e}^t)+\mathcal{E}_3(\mathbb{e}^3\wedge\mathbb{e}^t)$$

A. $curl(\mathcal{B}+\mathcal{E})$

$$curl(\mathcal{B}+\mathcal{E})=\mathbb{e}^\mu\wedge\partial_\mu(\mathcal{B}+\mathcal{E})=\mathcal{A}$$
$$=\mathcal{A}_t(\mathbb{e}^1\wedge\mathbb{e}^2\wedge\mathbb{e}^3)+\mathcal{A}_1(\mathbb{e}^2\wedge\mathbb{e}^3\wedge\mathbb{e}^t)+\mathcal{A}_2(\mathbb{e}^3\wedge\mathbb{e}^1\wedge\mathbb{e}^t)+\mathcal{A}_3(\mathbb{e}^1\wedge\mathbb{e}^2\wedge\mathbb{e}^t)$$
$$\mathcal{A}_t=\partial_1\mathcal{B}_1+\partial_2\mathcal{B}_2+\partial_3\mathcal{B}_3,\qquad \mathcal{A}_1=\partial_2\mathcal{E}_3-\partial_3\mathcal{E}_2+\partial_t\mathcal{B}_1$$
$$\mathcal{A}_2=\partial_3\mathcal{E}_1-\partial_1\mathcal{E}_3+\partial_t\mathcal{B}_2,\qquad \mathcal{A}_3=\partial_1\mathcal{E}_2-\partial_2\mathcal{E}_1+\partial_t\mathcal{B}_3$$

관행적 표현

$$\mathcal{A}_t=\nabla\cdot\mathcal{B},\qquad \mathcal{A}=\nabla\times\mathcal{E}+\partial_t\mathcal{B}$$

B. $curl^2(\mathcal{B}+\mathcal{E})=0$

$$curl^2(\mathcal{B}+\mathcal{E})=\mathbb{e}^\mu\wedge\partial_\mu\mathcal{A}=(\partial_1\mathcal{A}_1+\partial_2\mathcal{A}_2+\partial_3\mathcal{A}_3-\partial_t\mathcal{A}_t)(-I)=0$$

관행적 표현

$$\nabla\cdot\mathcal{A}-\partial_t\mathcal{A}_t=0$$

C. $div(\mathcal{B}+\mathcal{E})=0$

$$(\mathcal{B}+\mathcal{E})^d=(\mathcal{B}+\mathcal{E})\cdot I$$
$$=\mathcal{E}_1(\mathbb{e}^2\wedge\mathbb{e}^3)+\mathcal{E}_2(\mathbb{e}^3\wedge\mathbb{e}^1)+\mathcal{E}_3(\mathbb{e}^2\wedge\mathbb{e}^3)-\mathcal{B}_1(\mathbb{e}^1\wedge\mathbb{e}^t)-\mathcal{B}_2(\mathbb{e}^2\wedge\mathbb{e}^t)-\mathcal{B}_3(\mathbb{e}^3\wedge\mathbb{e}^t)$$
$$div(\mathcal{B}+\mathcal{E})=curl\{\mathcal{B}^d+\mathcal{E}^d\}$$
$$=(\partial_1\mathcal{E}_1+\partial_2\mathcal{E}_2+\partial_3\mathcal{E}_3)(\mathbb{e}^1\wedge\mathbb{e}^2\wedge\mathbb{e}^3)-(\partial_2\mathcal{B}_3-\partial_3\mathcal{B}_2-\partial_t\mathcal{E}_1)(\mathbb{e}^2\wedge\mathbb{e}^3\wedge\mathbb{e}^t)$$
$$-(\partial_3\mathcal{B}_1-\partial_1\mathcal{B}_3-\partial_t\mathcal{E}_2)(\mathbb{e}^3\wedge\mathbb{e}^1\wedge\mathbb{e}^t)-(\partial_1\mathcal{B}_2-\partial_2\mathcal{B}_1-\partial_t\mathcal{E}_3)(\mathbb{e}^1\wedge\mathbb{e}^2\wedge\mathbb{e}^t)=0$$

관행적 표현

$$\nabla\cdot\mathcal{E}=0,\qquad \nabla\times\mathcal{B}-\partial_t\mathcal{E}=0$$

D. $Lap(\mathcal{B}+\mathcal{E})=\mathcal{J}$

$$curl^d(\mathcal{B}+\mathcal{E})=curl(\mathcal{B}+\mathcal{E})\cdot I=-\mathcal{A}_1\mathbb{e}^1-\mathcal{A}_2\mathbb{e}^2-\mathcal{A}_3\mathbb{e}^3-\mathcal{A}_t\mathbb{e}^t$$
$$Lap(\mathcal{B}+\mathcal{E})=\mathbb{e}^\mu\wedge\partial_\mu\{curl^d(\mathcal{B}+\mathcal{E})\}=\mathcal{J}$$
$$=(\partial_3\mathcal{A}_2-\partial_2\mathcal{A}_3)(\mathbb{e}^2\wedge\mathbb{e}^3)+(\partial_1\mathcal{A}_3-\partial_3\mathcal{A}_1)(\mathbb{e}^3\wedge\mathbb{e}^1)+(\partial_2\mathcal{A}_1-\partial_1\mathcal{A}_2)(\mathbb{e}^1\wedge\mathbb{e}^2)$$

$$+(\partial_t\mathcal{A}_1-\partial_1\mathcal{A}_t)(\mathbb{e}^1\wedge\mathbb{e}^t)+(\partial_t\mathcal{A}_2-\partial_2\mathcal{A}_t)(\mathbb{e}^2\wedge\mathbb{e}^t)+(\partial_t\mathcal{A}_3-\partial_3\mathcal{A}_t)(\mathbb{e}^3\wedge\mathbb{e}^t)$$

$$=-\mathcal{K}_1(\mathbb{e}^2\wedge\mathbb{e}^3)-\mathcal{K}_2(\mathbb{e}^3\wedge\mathbb{e}^1)-\mathcal{K}_3(\mathbb{e}^1\wedge\mathbb{e}^2)+\mathcal{L}_1(\mathbb{e}^1\wedge\mathbb{e}^t)+\mathcal{L}_2(\mathbb{e}^2\wedge\mathbb{e}^t)+\mathcal{L}_3(\mathbb{e}^3\wedge\mathbb{e}^t)$$

$\mathcal{K}_i: spin\ density, \qquad \mathcal{L}_i: spin\ current\ density$

관행적 표현

$$-\mathcal{K}=\nabla\times\mathcal{A}, \qquad -\mathcal{L}=\nabla\mathcal{A}_t-\partial_t\mathcal{A}$$

E. particle and wave

앞의 식의 $\mathcal{A}_\mu$ 를 $\mathcal{B}_i,\mathcal{E}_j$ 로 치환하자.（4.2A 와 4.2C）

$$\mathcal{K}_1=\partial_2\mathcal{A}_3-\partial_3\mathcal{A}_2=\partial_2(\partial_1\mathcal{E}_2-\partial_2\mathcal{E}_1+\partial_t\mathcal{B}_3)-\partial_3(\partial_3\mathcal{E}_1-\partial_1\mathcal{E}_3+\partial_t\mathcal{B}_2)$$

$$=-\partial_{22}\mathcal{E}_1-\partial_{33}\mathcal{E}_1+\partial_t(\partial_2\mathcal{B}_3-\partial_3\mathcal{B}_2)+\partial_1(\partial_2\mathcal{E}_2+\partial_3\mathcal{E}_3)$$

$$=-\partial_{22}\mathcal{E}_1-\partial_{33}\mathcal{E}_1+\partial_t(\partial_t\mathcal{E}_1)-\partial_1(\partial_1\mathcal{E}_1)=\Box\mathcal{E}_1, \qquad \nabla\cdot\mathcal{E}=0, \qquad \nabla\times\mathcal{B}-\partial_t\mathcal{E}=0$$

$$\mathcal{K}_1=\Box\mathcal{E}_1 \quad \mathcal{K}_2=\Box\mathcal{E}_2 \quad \mathcal{K}_3=\Box\mathcal{E}_3$$

$$\mathcal{L}_1=-(\partial_1\mathcal{A}_t-\partial_t\mathcal{A}_1)=-\partial_1(\partial_1\mathcal{B}_1+\partial_2\mathcal{B}_2+\partial_3\mathcal{B}_3)+\partial_t(\partial_2\mathcal{E}_3-\partial_3\mathcal{E}_2+\partial_t\mathcal{B}_1)$$

$$=-\partial_{11}\mathcal{B}_1+\partial_{tt}\mathcal{B}_1-\partial_2(\partial_1\mathcal{B}_2-\partial_t\mathcal{E}_3)-\partial_3(\partial_1\mathcal{B}_3+\partial_t\mathcal{E}_2)$$

$$=-\partial_{11}\mathcal{B}_1+\partial_{tt}\mathcal{B}_1-\partial_2(\partial_2\mathcal{B}_1)-\partial_3(\partial_3\mathcal{B}_1)=\Box\mathcal{B}_1,$$

$$\mathcal{L}_1=\Box\mathcal{B}_1 \quad \mathcal{L}_2=\Box\mathcal{B}_2 \quad \mathcal{L}_3=\Box\mathcal{B}_3$$

F. $curl(\mathcal{J})=0$

$$curl(\mathcal{J})=curl(\mathcal{K}+\mathcal{L})=\mathbb{e}^\mu\wedge\partial_\mu(\mathcal{K}+\mathcal{L})$$

$$=-(\partial_1\mathcal{K}_1+\partial_2\mathcal{K}_2+\partial_3\mathcal{K}_3)(\mathbb{e}^1\wedge\mathbb{e}^2\wedge\mathbb{e}^3)+(\partial_2\mathcal{L}_3-\partial_3\mathcal{L}_2-\partial_t\mathcal{K}_1)(\mathbb{e}^2\wedge\mathbb{e}^3\wedge\mathbb{e}^t)$$

$$+(\partial_3\mathcal{L}_1-\partial_1\mathcal{L}_3-\partial_t\mathcal{K}_2)(\mathbb{e}^3\wedge\mathbb{e}^1\wedge\mathbb{e}^t)+(\partial_1\mathcal{L}_2-\partial_2\mathcal{L}_1-\partial_t\mathcal{K}_3)(\mathbb{e}^1\wedge\mathbb{e}^2\wedge\mathbb{e}^t)=0$$

관행적 표현

$$\nabla\cdot\mathcal{K}=0 \qquad \nabla\times\mathcal{L}-\partial_t\mathcal{K}=0$$

4.3 3-vector field

A. $curl(\mathbb{A})$

$\mathbb{A} = -\mathbb{A}_1 e^2 \wedge e^3 \wedge e^t - \mathbb{A}_2 e^3 \wedge e^1 \wedge e^t - \mathbb{A}_3 e^1 \wedge e^2 \wedge e^t - \mathbb{A}_t e^1 \wedge e^2 \wedge e^3$

$curl(\mathbb{A}) = e^\mu \wedge \partial_\mu \mathbb{A} = \mathbb{V}I \qquad \mathbb{V} = -\partial_t \mathbb{A}_t + \partial_1 \mathbb{A}_1 + \partial_2 \mathbb{A}_2 + \partial_3 \mathbb{A}_3$

$curl^2(\mathbb{A}) = e^\mu \wedge \partial_\mu \mathbb{V} = null$

C. $div(\mathbb{A}) = 0$

$\mathbb{A}^d = \mathbb{A} \cdot I = \mathbb{A}_1 e^1 + \mathbb{A}_2 e^2 + \mathbb{A}_3 e^3 + \mathbb{A}_t e^t$

$div(\mathbb{A}) = curl(\mathbb{A}^d) = e^\mu \wedge \partial_\mu \mathbb{A}^d$

$= (\partial_2 \mathbb{A}_3 - \partial_3 \mathbb{A}_2)(e^2 \wedge e^3) + (\partial_3 \mathbb{A}_1 - \partial_1 \mathbb{A}_3)(e^3 \wedge e^1) + (\partial_1 \mathbb{A}_2 - \partial_2 \mathbb{A}_1)(e^1 \wedge e^2)$

$+(\partial_1 \mathbb{A}_t - \partial_t \mathbb{A}_1)(e^1 \wedge e^t) + (\partial_2 \mathbb{A}_t - \partial_t \mathbb{A}_2)(e^2 \wedge e^t) + (\partial_3 \mathbb{A}_t - \partial_t \mathbb{A}_3)(e^3 \wedge e^t) = 0$

관행적 표현, $\nabla \times \mathbb{A} = 0 \qquad \nabla \mathbb{A}_t - \partial_t \mathbb{A} = 0$

D. $Lap(\mathbb{A}) = \mathbb{J}$

$curl^d(\mathbb{A}) = \mathbb{V}I^d = \mathbb{V} \qquad Lap(\mathbb{A}) = e^\mu \wedge \partial_\mu \{curl^d(\mathbb{A})\} = \mathbb{J}$

$= \partial_1 \mathbb{V} e^1 + \partial_2 \mathbb{V} e^2 + \partial_3 \mathbb{V} e^3 + \partial_t \mathbb{V} e^t = \mathbb{J}_1 e^1 + \mathbb{J}_2 e^2 + \mathbb{J}_3 e^3 + \mathbb{J}_t e^t$

$\mathbb{J}_i$: $color\ density, \qquad \mathbb{J}_t$: $color\ current\ density$

관행적 표현, $\mathbb{J} = \nabla \mathbb{V} \qquad \mathbb{J}_t = \partial_t \mathbb{V}$

E. particle and wave

앞의 식의 $\mathbb{V}$ 를 $\mathbb{A}_\mu$ 로 치환하자. (4.3A 와 4.3C).

$\mathbb{J}_1 = \partial_1 \mathbb{V} = \partial_1(\partial_t \mathbb{A}_t - \partial_1 \mathbb{A}_1 - \partial_2 \mathbb{A}_2 - \partial_3 \mathbb{A}_3) = \partial_{t1} \mathbb{A}_t - \partial_{11} \mathbb{A}_1 - \partial_{21} \mathbb{A}_2 - \partial_{31} \mathbb{A}_3$

$= \partial_{tt} \mathbb{A}_1 - \partial_{11} \mathbb{A}_1 - \partial_{22} \mathbb{A}_1 - \partial_{33} \mathbb{A}_1 = \Box \mathbb{A}_1$

$\mathbb{J}_t = \partial_t \mathbb{V} = \partial_t(\partial_t \mathbb{A}_t - \partial_1 \mathbb{A}_1 - \partial_2 \mathbb{A}_2 - \partial_3 \mathbb{A}_3) = \partial_{tt} \mathbb{A}_t - \partial_{1t} \mathbb{A}_1 - \partial_{2t} \mathbb{A}_2 - \partial_{3t} \mathbb{A}_t$

$= \partial_{tt} A_t - \partial_{11} \mathbb{A}_t - \partial_{22} \mathbb{A}_t - \partial_{33} \mathbb{A}_t = \Box \mathbb{A}_t$

$\mathbb{J}_1 = \Box \mathbb{A}_1 \qquad \mathbb{J}_2 = \Box \mathbb{A}_2 \qquad \mathbb{J}_3 = \Box \mathbb{A}_3 \qquad \mathbb{J}_t = \Box \mathbb{A}_t$

F. $curl(\mathbb{J}) = 0$

$curl(\mathbb{J}) = e^\mu \wedge \partial_\mu(\mathbb{J}) = 0$

$(\partial_2 \mathbb{J}_3 - \partial_3 \mathbb{J}_2)(e^2 \wedge e^3) = (\partial_3 \mathbb{J}_1 - \partial_1 \mathbb{J}_3)(e^3 \wedge e^1) = (\partial_1 \mathbb{J}_2 - \partial_2 \mathbb{J}_1)(e^1 \wedge e^2) = 0$

$(\partial_1 \mathbb{J}_t - \partial_t \mathbb{J}_1)(e^1 \wedge e^t) = (\partial_2 \mathbb{J}_t - \partial_t \mathbb{J}_2)(e^2 \wedge e^t) = (\partial_3 \mathbb{J}_t - \partial_t \mathbb{J}_3)(e^3 \wedge e^t) = 0$

관행적 표현, $\nabla \times \mathbb{J} = 0 \qquad \nabla \mathbb{J}_t - \partial_t \mathbb{J} = 0$

4.4 scalar field $\mathcal{v}$

A. $curl(\mathcal{v})$

$curl(\mathcal{v}) = \mathbb{e}^{\mu} \wedge \partial_{\mu}\mathcal{v} = a \quad a = a_1\mathbb{e}^1 + a_2\mathbb{e}^2 + a_3\mathbb{e}^3 + a_t\mathbb{e}^t$

$a_1 = \partial_1\mathcal{v}, \quad a_2 = \partial_2\mathcal{v}, \quad a_3 = \partial_3\mathcal{v}, \quad a_t = \partial_t\mathcal{v}$

B. $curl^2(\mathcal{v}) = 0$

$curl^2(\mathcal{v}) = \mathbb{e}^{\mu} \wedge \partial_{\mu}a = 0$

$(\partial_2 a_3 - \partial_3 a_2)(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) + (\partial_3 a_1 - \partial_1 a_3)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1) + (\partial_1 a_2 - \partial_2 a_1)(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2) +$

$(\partial_1 a_t - \partial_t a_1)(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) + (\partial_2 a_t - \partial_t a_2)(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t) + (\partial_3 a_t - \partial_t a_3)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) = 0$

관행적 표현, $\nabla \times a = 0 \quad \nabla a_t - \partial_t a = 0$

C. $div(\mathcal{v}) = null$

$\mathcal{v}^d = \mathcal{v}1^d = \mathcal{v}I$

$div(\mathcal{v}) = curl(\mathcal{v}^d) = \mathbb{e}^{\mu} \wedge \partial_{\mu}\mathcal{v}I = null$

D. $Lap(\mathcal{v}) = \mathcal{j}$

$curl^d(\mathcal{v}) = curl(\mathcal{v}) \cdot I$

$= -a_t(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) - a_1(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) - a_2(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) - a_3(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t)$

$Lap(\mathcal{v}) = \mathbb{e}^{\mu} \wedge \partial_{\mu}\{curl^d(\mathcal{v})\} = (-\partial_t a_t + \partial_1 a_1 + \partial_2 a_2 + \partial_3 a_3)I = -\mathcal{m}I$

$\mathcal{m} = \partial_t a_t - \nabla \cdot a, \quad \mathcal{m}: mass\ density$

E. particle and wave

앞의 식의 a_{μ}를 $\mathcal{v}$로 치환하자. 하자.（4.4A）

$\mathcal{m} = \partial_t a_t - \nabla \cdot a = \partial_{tt}\mathcal{v} - \partial_{11}\mathcal{v} - \partial_{22}\mathcal{v} - \partial_{33}\mathcal{v} = \Box\mathcal{v}$

$\mathcal{m} = \Box\mathcal{v}$

F. $curl(\mathcal{j}) = null$

$curl(\mathcal{j}) = \mathbb{e}^{\mu} \wedge \partial_{\mu}\mathcal{j} = \mathbb{e}^{\mu} \wedge \partial_{\mu}(\mathcal{m}I) = null$

4.5 questions

vector field A는 파동성을 띠고, $J = Lapl(A)$는 입자성을 띤다. 한 존재의 두 모습이다. 서로 dual 차원이다. duality.

$J = div\{curl(A)\} \neq 0$이면 $curl(A)$가 연속이 아니라는 뜻이다. 입자는 $curl(A)$가 쌓이거나 새나가는 현상이다.

J는 차원에 따라 다르다.

color 밀도 : $e^1, e^2, e^3,$ spin 밀도 : $(e^2 \wedge e^3), (e^3 \wedge e^1), (e^1 \wedge e^2)$

charge 밀도 : $(e^1 \wedge e^2 \wedge e^3),$ mass 밀도 : $(I = -e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 \wedge e^t)$

다음을 알 수 있다.

1) color 는 끈(string)의 개념이다.
2) spin 은 막(membrane)의 개념이다.
3) charge 는 알갱이(particle)의 개념이다.
4) mass 의 차원은 pseudoscalar 이다. 시간이 흘러야 존재한다.
5) 4.3E 에서 e^i가 color(quark)라면 e^t는 Higgs 이다. 질량을 만드는 데 꼭 필요하다.
6) 전자의 spin 은 charge 가 회전해서 만들어지는 게 아니다.
7) 전하를 고려하면 양성자에 quark 세 개가 있는 것은 우연이 아니다. 그렇다고 quark 에 전하가 존재하는 것은 아니다.

반대로 모르는 것도 생긴다.

1) 전자$(e^1 \wedge e^2 \wedge e^3)$의 스핀$(e^2 \wedge e^3), (e^3 \wedge e^1), (e^1 \wedge e^2)$은 전하의 일부분 모습인가?
2) 양전하와 음전하는 기하적 차이(isomer)인가? $(e^1 \wedge e^2 \wedge e^3), (e^2 \wedge e^1 \wedge e^3)$
3) 양성자 중성자는 있는데 음성자는 없을까?
4) 음질량이 없는 이유?
5) 전류는 전하가 움직이는 것이지만 current density$(e^i \wedge e^j \wedge e^t)$의 차원을 보면 초전도체는 상태이다. 아마 spin 이 잘 정렬된 상태에 시간이 흐르는 건가?

5 sedenion

다음 장에서 에너지 밀도를 multi-vector 로 표현하려면 vector norm 의 새로운 정의가 필요하다. 이 정의가 다시 16 basis 의 곱셈을 정의한다.

먼저 차원에 따라 곱셈의 특성이 다르므로 basis 를 구분하여 표시하자.

$\mathbb{b}_1 = \{\mathbb{e}^1, \mathbb{e}^2, \mathbb{e}^3, \mathbb{e}^t\}$

$\mathbb{b}_2 = \{(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2), (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3), (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1), (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t), (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t), (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)\}$

$\mathbb{b}_3 = \{(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3), (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t), (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t), (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)\}$

sedenion $1, \mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2, \mathbb{b}_3, I$의 합집합 $I = -(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)$

octonion $1, \mathbb{b}_2, I$의 합집합

quaternion $1, (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2), (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3), (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1)$

놀랍지는 않다. Pauli spin matrices 는 quaternion 과 관련이 있다고 알려져 있다.

A. vector norm

기존의 vector norm 의 정의 $\|v\| = v \cdot v$는 불편하다. 새 정의가 필요하다.

$v = \mathbb{e}^1 + 2\mathbb{e}^2 + 3\mathbb{e}^t$ $\quad v \cdot v = (1)^2 + (2)^2 - (3)^2 \neq (1)^2 + (2)^2 + (3)^2$

$v = (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) + 2(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)$ $\quad v \cdot v = -(1)^2 + (2)^2 \neq (1)^2 + (2)^2$

한 vector 에 그것의 dual vector 를 곱하면 pseudoscalar 가 된다고 가정하면 그 크기는 계수의 제곱이 되어 vector norm 에 정의에 적합하다. 예를 들어

$v = 2\mathbb{e}^t, \quad v^d = 2(-\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3), \quad vv^d = (2)^2\mathbb{e}^t(-\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) = (2)^2 I$

$\|v\| = vv^d, \quad v^d = v \cdot I$

이 간단한 생각을 임의의 vector 로 확장하면 곱셈표가 구해진다.

B. basic multiplication

$vv^d = I$인 기본적인 곱셈.

$\mathbb{e}^1(-\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) = \mathbb{e}^2(-\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)$

$= \mathbb{e}^3(-\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t) = \mathbb{e}^t(-\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)$

$= (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)(-\mathbb{e}^1) = (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)(-\mathbb{e}^2)$

$= (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t)(-\mathbb{e}^3) = (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)(-\mathbb{e}^t) = I$

$$(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)(-\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) = (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)(-\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) = (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1)(-\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t)$$

$$= (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) = (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1) = (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2) = I$$

1-basis 와 3-basis 의 곱은 commutative 하고 2-basis 와 2-basis 의 곱은 anti-commutative 하다. 곱셈에 교환법칙과 결합법칙이 성립하지는 않는다.

C. $1^d,\ I^d$

$$1I = I1 = I = 1\{1^d\} = I\{I^d\}, \qquad 1^d = I, \qquad I^d = 1$$

D. square of basis

ex1) $vv^d = (I + 2)(1 + 2I) = ((1)^2 + (2)^2)I + 2(1 + I^2)$

vector norm 의 정의 $\|I + 2\| = \{(1)^2 + (2)^2\}I$를 만족하려면

$$1^2 + I^2 = 0 \qquad\qquad I^2 = -1$$

ex2) $vv^d = \{\mathbb{e}^1 + 2(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)\}\{(-\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) + 2(-\mathbb{e}^1)\} = ((1)^2 + (2)^2)I$

$$\mathbb{e}^1\mathbb{e}^1 + (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)^2 = 0$$

$$(\mathbb{e}^1)^2 = (\mathbb{e}^2)^2 = (\mathbb{e}^3)^2 = (\mathbb{e}^t)^2 = -1$$

$$(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)^2 = (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t)^2 = (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)^2 = (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)^2 = 1$$

$(\mathbb{e}^1)^2 = 1$도 가능하지만 중력을 설명하려면 -1이다. 6.D

ex3) $vv^d = \{(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) + 2(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)\}\{(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) - 2(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)\} = ((1)^2 + (2)^2)I$

$vv^d = \{(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) - 2(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)\}\{-(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) + 2(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)\} = ((1)^2 + (2)^2)I$

$$(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) - (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) = 0$$

$$(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)^2 = (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)^2 = 1$$

$$(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)^2 = (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t)^2 = (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)^2 = (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)^2 = (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)^2 = (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1)^2 = 1$$

-1도 가능하지만 Lorentz transformation 과 Pauli spin matrices 를 설명하려면 $+1$이다. 이 부호가 시공간을 결정한다. $+1$이면 hyperbolic, -1이면 elliptic geometry 이다. 5.2

E. $\mathbb{b}_i I,\ I\mathbb{b}_i$

ex4) $vv^d = (\mathbb{e}^1 + 2)\{(-\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) + 2I\} = ((1)^2 + (2)^2)I + 2(-\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) + 2\mathbb{e}^1 I$

$vv^d = \{(-\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) + 2I\}(\mathbb{e}^1 + 2) = ((1)^2 + (2)^2)I + 2(-\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) + 2I\mathbb{e}^1$

vector norm 의 정의 $\|\mathbb{e}^1 + 2\| = \{(1)^2 + (2)^2\}I$를 만족하려면

$$\mathbb{e}^1 I = (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) \qquad\qquad I\mathbb{e}^1 = (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)$$

ex5) $vv^d = \{(-\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) + 2\}\{(-\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2) + 2I\} = ((1)^2 + (2)^2)I$

$vv^d = \{(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2) + 2I\}\{(-\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) + 2\} = ((1)^2 + (2)^2)I$

$(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)I = -(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)$ $\qquad$ $I(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) = (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)$

ex6) $vv^d = \{(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) + 2\}\{-\mathbb{e}^1 + 2I\} = ((1)^2 + (2)^2)I$

$vv^d = \{-\mathbb{e}^1 + 2I\}\{(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) + 2\} = ((1)^2 + (2)^2)I$

$(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)I = \mathbb{e}^1$ $\qquad$ $I(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) = \mathbb{e}^1$

F. $\mathbb{b}_i\mathbb{b}_j$

$\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2, \mathbb{b}_3$의 곱셈은 dot product 로 공통인 basis 를 상쇄한다. geometry algebra 의 inner product 와 비슷하다. 경우에 따라 부호를 바꾼다. (5.K)

$(\ldots \wedge \mathbb{e}^p \wedge \mathbb{e}^q)(\mathbb{e}^q \wedge \mathbb{e}^r \wedge \ldots) = \pm(\mathbb{e}^q \cdot \mathbb{e}^q)\{(\ldots \wedge \mathbb{e}^p)(\mathbb{e}^r \wedge \ldots)\}, \qquad p, q, r, s = 1,2,3, t$

G. $\mathbb{b}_1\mathbb{b}_1,\ \mathbb{b}_3\mathbb{b}_3$

$\mathbb{e}^p\mathbb{e}^q = (\mathbb{e}^p \wedge \mathbb{e}^q)$

$\mathbb{e}^q\mathbb{e}^p = (\mathbb{e}^q \wedge \mathbb{e}^p) = -(\mathbb{e}^p \wedge \mathbb{e}^q)$ anti-commutative

$(\mathbb{e}^p \wedge \mathbb{e}^q \wedge \mathbb{e}^r)(\mathbb{e}^p \wedge \mathbb{e}^q \wedge \mathbb{e}^s) = -(\mathbb{e}^r \wedge \mathbb{e}^q \wedge \mathbb{e}^p)(\mathbb{e}^p \wedge \mathbb{e}^q \wedge \mathbb{e}^s)$

$= -(\mathbb{e}^p \cdot \mathbb{e}^p)(\mathbb{e}^r \wedge \mathbb{e}^q)(\mathbb{e}^q \wedge \mathbb{e}^s) = -(\mathbb{e}^p \cdot \mathbb{e}^p)(\mathbb{e}^q \cdot \mathbb{e}^q)\mathbb{e}^r\mathbb{e}^s = -(\mathbb{e}^p \cdot \mathbb{e}^p)(\mathbb{e}^q \cdot \mathbb{e}^q)(\mathbb{e}^r \wedge \mathbb{e}^s)$

$(\mathbb{e}^p \wedge \mathbb{e}^q \wedge \mathbb{e}^s)(\mathbb{e}^p \wedge \mathbb{e}^q \wedge \mathbb{e}^r) = -(\mathbb{e}^p \cdot \mathbb{e}^p)(\mathbb{e}^q \cdot \mathbb{e}^q)(\mathbb{e}^s \wedge \mathbb{e}^r)$ anti-commutative

ex7) $vv^d = \{\mathbb{e}^1 + 2(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)\}\{(-\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) + 2(-\mathbb{e}^2)\} = ((1)^2 + (2)^2)I$

$\mathbb{e}^1\mathbb{e}^2 + (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) = 0$

$\mathbb{e}^1\mathbb{e}^2 = (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)$

$(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) = (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^t \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^2) = (\mathbb{e}^t \cdot \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^3)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^2)$

$= -(\mathbb{e}^3 \cdot \mathbb{e}^3)\mathbb{e}^1\mathbb{e}^2 = -(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)$

$vv^d = \{\mathbb{e}^1 + 2(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)\}\{(-\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) + 2(-\mathbb{e}^t)\} = ((1)^2 + (2)^2)I$

$\mathbb{e}^1\mathbb{e}^t + (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) = 0$

$\mathbb{e}^1\mathbb{e}^t = (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)$

$(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) = -(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t)$

$= -(\mathbb{e}^3 \cdot \mathbb{e}^3)(\mathbb{e}^2 \cdot \mathbb{e}^2)\mathbb{e}^1\mathbb{e}^t = -(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)$

H. $\mathbb{b}_2\mathbb{b}_2$

$$(\mathbb{e}^p \wedge \mathbb{e}^q)(\mathbb{e}^p \wedge \mathbb{e}^r) = -(\mathbb{e}^q \wedge \mathbb{e}^p)(\mathbb{e}^p \wedge \mathbb{e}^r) = -(\mathbb{e}^p \cdot \mathbb{e}^p)(\mathbb{e}^q \wedge \mathbb{e}^r)$$

$$(\mathbb{e}^p \wedge \mathbb{e}^r)(\mathbb{e}^p \wedge \mathbb{e}^q) = -(\mathbb{e}^p \cdot \mathbb{e}^p)(\mathbb{e}^r \wedge \mathbb{e}^q) \qquad \text{anti-commutative}$$

Pauli spin matrices 는 quaternion 에 다름 아니다.

$$\mathbb{s}^1 = (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3), \qquad \mathbb{s}^2 = (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1), \qquad \mathbb{s}^3 = (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)$$

$$\mathbb{s}^1\mathbb{s}^2 = (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1) = (\mathbb{e}^3 \cdot \mathbb{e}^3)\mathbb{e}^2\mathbb{e}^1 = -(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2) = -\mathbb{s}^3$$

$$\mathbb{s}^1\mathbb{s}^1 = (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) = 1, \ \mathbb{s}^2\mathbb{s}^2 = \mathbb{s}^3\mathbb{s}^3 = 1 \qquad 5.\text{D}$$

$$\mathbb{s}^2\mathbb{s}^3 = -\mathbb{s}^3\mathbb{s}^2 = -\mathbb{s}^1, \qquad \mathbb{s}^3\mathbb{s}^1 = -\mathbb{s}^3\mathbb{s}^1 = -\mathbb{s}^2, \qquad \mathbb{s}^1\mathbb{s}^2 = -\mathbb{s}^2\mathbb{s}^1 = -\mathbb{s}^3$$

$$\mathbb{s}^1\mathbb{s}^2\mathbb{s}^3 = (\mathbb{s}^1\mathbb{s}^2)\mathbb{s}^3 = \mathbb{s}^1(\mathbb{s}^2\mathbb{s}^3) = -1$$

ex8) $vv^d = \{(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2) + 2(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t)\}\{(-\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) + 2(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1)\} = ((1)^2 + (2)^2)I$

$$(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1) - (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) = 0$$

$$(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1) = (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^1)(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^3) = (\mathbb{e}^1 \cdot \mathbb{e}^1)\mathbb{e}^2\mathbb{e}^3 = (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)$$

$$(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) = -(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^t \wedge \mathbb{e}^3) = -(\mathbb{e}^t \cdot \mathbb{e}^t)\mathbb{e}^2\mathbb{e}^3 = (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)$$

I. $\mathbb{b}_1\mathbb{b}_3, \ \mathbb{b}_3\mathbb{b}_1$

$$\mathbb{e}^p(\mathbb{e}^p \wedge \mathbb{e}^q \wedge \mathbb{e}^r) = (\mathbb{e}^p \cdot \mathbb{e}^p)(\mathbb{e}^q \wedge \mathbb{e}^r)$$

$$(\mathbb{e}^p \wedge \mathbb{e}^q \wedge \mathbb{e}^r)\mathbb{e}^p = (\mathbb{e}^q \wedge \mathbb{e}^r \wedge \mathbb{e}^p)\mathbb{e}^p = (\mathbb{e}^p \cdot \mathbb{e}^p)(\mathbb{e}^q \wedge \mathbb{e}^r) \qquad \text{commutative}$$

ex9) $vv^d = (\mathbb{e}^1 + 2\mathbb{e}^2)\{(-\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) + 2(-\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)\} = ((1)^2 + (2)^2)I$

$$\mathbb{e}^1(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) + \mathbb{e}^2(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) = 0$$

$$\mathbb{e}^1(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) = \mathbb{e}^1(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t \wedge \mathbb{e}^3) = (\mathbb{e}^1 \cdot \mathbb{e}^1)(\mathbb{e}^t \wedge \mathbb{e}^3) = -(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)$$

$$\mathbb{e}^2(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) = (\mathbb{e}^2 \cdot \mathbb{e}^2)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) = (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)$$

$vv^d = \{(-\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) + 2(-\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)\}(\mathbb{e}^t + 2\mathbb{e}^2) = ((1)^2 + (2)^2)I$

$$(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)\mathbb{e}^2 + (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)\mathbb{e}^t = 0$$

$$(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)\mathbb{e}^2 = (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)\mathbb{e}^2 = (\mathbb{e}^2 \cdot \mathbb{e}^2)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1) = (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1)$$

$$(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)\mathbb{e}^t = (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)\mathbb{e}^t = (\mathbb{e}^t \cdot \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1) = -(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1)$$

J. $\mathbb{b}_1\mathbb{b}_2, \ \mathbb{b}_2\mathbb{b}_3$

$$\mathbb{e}^p(\mathbb{e}^p \wedge \mathbb{e}^q) = (\mathbb{e}^p \cdot \mathbb{e}^p)\mathbb{e}^q$$

$$(\mathbb{e}^p \wedge \mathbb{e}^q)\mathbb{e}^p = -(\mathbb{e}^q \wedge \mathbb{e}^p)\mathbb{e}^p = -\mathbb{e}^q \qquad \text{anti-commutative}$$

$(\mathbb{e}^p \wedge \mathbb{e}^q)(\mathbb{e}^p \wedge \mathbb{e}^q \wedge \mathbb{e}^r) = -(\mathbb{e}^q \wedge \mathbb{e}^p)(\mathbb{e}^p \wedge \mathbb{e}^q \wedge \mathbb{e}^r) = -(\mathbb{e}^p \cdot \mathbb{e}^p)(\mathbb{e}^q \cdot \mathbb{e}^q)\mathbb{e}^r = -\mathbb{e}^q$

$(\mathbb{e}^p \wedge \mathbb{e}^q \wedge \mathbb{e}^r)(\mathbb{e}^p \wedge \mathbb{e}^q) = -(\mathbb{e}^r \wedge \mathbb{e}^q \wedge \mathbb{e}^p)(\mathbb{e}^p \wedge \mathbb{e}^q) = -(\mathbb{e}^p \cdot \mathbb{e}^p)(\mathbb{e}^q \cdot \mathbb{e}^q)\mathbb{e}^r = -\mathbb{e}^q$

ex10) $vv^d = \{\mathbb{e}^2 + 2(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)\}\{(-\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) + 2(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)\} = ((1)^2 + (2)^2)I$

$vv^d = \{(-\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) + 2(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)\}\{\mathbb{e}^2 + 2(-\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)\} = ((1)^2 + (2)^2)I$

$\mathbb{e}^2(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2) - (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) = 0$

$(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)\mathbb{e}^2 + (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) = 0$

$\mathbb{e}^2(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2) = -\mathbb{e}^2(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^1) = -(\mathbb{e}^2 \cdot \mathbb{e}^2)\mathbb{e}^1 = -\mathbb{e}^1$

$(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)\mathbb{e}^2 = (\mathbb{e}^2 \cdot \mathbb{e}^2)\mathbb{e}^1 = \mathbb{e}^1$

$(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) = (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^t \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1) = (\mathbb{e}^t \cdot \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^3 \cdot \mathbb{e}^3)\mathbb{e}^1 = -\mathbb{e}^1$

$(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) = (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t \wedge \mathbb{e}^3)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) = (\mathbb{e}^3 \cdot \mathbb{e}^3)(\mathbb{e}^t \cdot \mathbb{e}^t)\mathbb{e}^1 = -\mathbb{e}^1$

K. $\mathbb{b}_1\mathbb{b}_2,\ \mathbb{b}_2\mathbb{b}_3$

$\mathbb{e}^p(\mathbb{e}^q \wedge \mathbb{e}^r) = (\mathbb{e}^p \wedge \mathbb{e}^q \wedge \mathbb{e}^r)$

$(\mathbb{e}^q \wedge \mathbb{e}^r)\mathbb{e}^p = (\mathbb{e}^q \wedge \mathbb{e}^r \wedge \mathbb{e}^p) = (\mathbb{e}^p \wedge \mathbb{e}^q \wedge \mathbb{e}^r)$ commutative

특별히 다음 곱셈은 공통인 basis 를 상쇄하면서 부호를 바꾼다. anti-commutative

$(\mathbb{e}^p \wedge \mathbb{e}^q)(\mathbb{e}^p \wedge \mathbb{e}^r \wedge \mathbb{e}^s) = -(\mathbb{e}^q \wedge \mathbb{e}^p)(\mathbb{e}^p \wedge \mathbb{e}^r \wedge \mathbb{e}^s) = (\mathbb{e}^p \cdot \mathbb{e}^p)\mathbb{e}^q(\mathbb{e}^r \wedge \mathbb{e}^s)$

$(\mathbb{e}^p \wedge \mathbb{e}^r \wedge \mathbb{e}^s)(\mathbb{e}^p \wedge \mathbb{e}^q) = (\mathbb{e}^r \wedge \mathbb{e}^s \wedge \mathbb{e}^p)(\mathbb{e}^p \wedge \mathbb{e}^q) = -(\mathbb{e}^p \cdot \mathbb{e}^p)(\mathbb{e}^r \wedge \mathbb{e}^s)\mathbb{e}^q$

ex11) $vv^d = \{\mathbb{e}^1 + 2(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)\}\{(-\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) + 2(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)\} = ((1)^2 + (2)^2)I$

$vv^d = \{(-\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) + 2(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)\}\{\mathbb{e}^1 + 2(-\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)\} = ((1)^2 + (2)^2)I$

$\mathbb{e}^1(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) - (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) = 0$

$(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)\mathbb{e}^1 + (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) = 0$

$\mathbb{e}^1(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) = (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)$

$(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)\mathbb{e}^1 = (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1) = (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)$

$(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) = (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^t \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) = -(\mathbb{e}^t \cdot \mathbb{e}^t)\mathbb{e}^1(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) = \mathbb{e}^1(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)$

$(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) = -(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^t \wedge \mathbb{e}^1) = (\mathbb{e}^t \cdot \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)\mathbb{e}^1$

$= -(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)\mathbb{e}^1$

5.1 magnitude of vector norm

한 차원의 basis 들의 제곱은 모두 $+1$이거나 -1이다. 차원에 따라 다르다. 5.D. 그리고 $\mathbb{b}_1\mathbb{b}_1$, $\mathbb{b}_2\mathbb{b}_2$, $\mathbb{b}_3\mathbb{b}_3$의 곱셈은 모두 anti-commutative 하다. 5.G, 5.H. 그래서 한 차원의 basis 로 이루어진 vector norm 의 크기를 그 vector 의 제곱으로 표시할 수 있다.

ex) $v = \mathbb{e}^1 + 2\mathbb{e}^2 + 3\mathbb{e}^t$

$v^2 = (\mathbb{e}^1 + 2\mathbb{e}^2 + 3\mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^1 + 2\mathbb{e}^2 + 3\mathbb{e}^t)$

$= (\mathbb{e}^1)^2 + (2\mathbb{e}^2)^2 + (3\mathbb{e}^t)^2 + 2(\mathbb{e}^1\mathbb{e}^2 + \mathbb{e}^2\mathbb{e}^1) + 6(\mathbb{e}^2\mathbb{e}^t + \mathbb{e}^t\mathbb{e}^2) + 3(\mathbb{e}^1\mathbb{e}^2 + \mathbb{e}^2\mathbb{e}^1)$

$= -\{(1)^2 + (2)^2 + (3)^2\}$ 차원에 따라 부호가 다를 수 있다.

dual vector 도 basis 만 다를 뿐 계수는 같다. 그래서 어떤 vector norm 크기를 그 dual vector 의 제곱으로 표시할 수도 있다.

$v^d = v \cdot I = 1(-\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) + 2(-\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) + 3(-\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)$

$\{v^d\}^2 = \{(1)^2 + (2)^2 + (3)^2\}$

5.2 rotor

rotor R은 geometric algebra 에서 쓰는 용어이다.

5.J 에서

$$\mathbb{e}^1(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2) = \mathbb{e}^2, \qquad \mathbb{e}^2(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2) = -\mathbb{e}^1$$

$$\mathbb{e}^1(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) = \mathbb{e}^t, \qquad \mathbb{e}^t(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) = \mathbb{e}^1$$

평면 $(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)$ 위의 basis $\mathbb{e}^1, \mathbb{e}^2$를 $\Delta \ll 1$만큼 회전시키는 방법.

$$\mathbb{e}^{1\prime} = \mathbb{e}^1 R = \mathbb{e}^1\{1 + \Delta(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)\} = \mathbb{e}^1 + \Delta\mathbb{e}^2, \qquad R = \{1 + \Delta(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)\}$$

$$\mathbb{e}^{2\prime} = \mathbb{e}^2 R = \mathbb{e}^2\{1 + \Delta(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)\} = \mathbb{e}^2 - \Delta\mathbb{e}^1$$

작은 회전을 연속하면 rotor 가 된다.

$$R = \{1 + \Delta_1(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)\}\{1 + \Delta_2(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)\} \ldots$$

$$= \lim_{\Delta \to 0}\{1 + \Delta(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)\}^{\frac{\theta}{\Delta}} = e^{(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)\theta}$$

$$= 1 + \theta(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2) + \frac{1}{2!}\theta^2(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)^2 + \frac{1}{3!}\theta^3(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)^3 + \cdots$$

$$= \begin{cases} cosh\,\theta + sinh\,\theta\,(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2) & ((\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)^2 = +1) \\ cos\,\theta + sin\,\theta\,(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2) & ((\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)^2 = -1) \end{cases}$$

$(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)^2$의 이 부호에 따라 hyperbolic geometry 와 elliptic geometry 로 나뉜다.

만약 $R = e^{(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)\theta}$이고 $\tanh\theta = \beta = v/c$이면 Lorentz 변환이다.

$$\mathbb{e}^{1\prime} = \mathbb{e}^1 R = \mathbb{e}^1 e^{(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)\theta} = \mathbb{e}^1\{cosh\,\theta + sinh\,\theta\,(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)\} = \mathbb{e}^1\,cosh\,\theta + \mathbb{e}^t\,sinh\,\theta$$

$$\mathbb{e}^{t\prime} = \mathbb{e}^t R = \mathbb{e}^t e^{(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)\theta} = \mathbb{e}^t\{cosh\,\theta + sinh\,\theta\,(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)\} = \mathbb{e}^t\,cosh\,\theta + \mathbb{e}^1\,sinh\,\theta$$

주의할 점은 좌표가 아니라 basis 의 변환이다.

$$x'\mathbb{e}^{1\prime} + t'\mathbb{e}^{t\prime} = x\mathbb{e}^1 + t\mathbb{e}^t$$

6 energy density and force

전자기학의 관행적 에너지 밀도 $eng(A)$는 아래와 같다.

$$eng(A) = \frac{1}{2}(B^2 + E^2) = \frac{1}{2}\{(B_i)^2 + (E_i)^2\}, \qquad i = 1,2,3$$

이 책에서는 $curl(A) = B + E$의 vector norm 에 다름 아니다. 따라서 에너지 밀도는 pseudoscalar 이다.

$$eng(A) = \frac{1}{2}\|curl(A)\| = \frac{1}{2}curl(A)curl^d(A)$$

힘은 에너지 밀도가 연속하지 않으면 생기는 현상이다. 3.E

$$F = -div\{eng(A)\} = -curl\{eng^d(A)\}$$

$eng^d(A)$는 $eng(A)$의 크기이다. $curl(A)$의 norm 크기이다. 이는 다시 $curl^d(A)$의 norm 크기이기도 하다. 5.1 차원에 따라 부호가 바뀔 수 있다.

$$eng^d(A) = \frac{1}{2}\{curl(A)\}^2 \quad or \quad \frac{1}{2}\{curl^d(A)\}^2$$

vector field X, Y에 대해 다음 가정은 불편하지 않다. 다시 vector 는 수이다. 두 함수 곱셈의 미분과 두 vector field 곱셈의 $curl$이 다를 필요는 없다.

$$curl(XY) = \{curl(X)\}Y + X\{curl(Y)\}$$

힘의 정의가 가능한 $eng^d(A)$는 두 번째이다. 첫 번째는 $curl^2(A) = 0$이기 때문이다.

$$F = \frac{1}{2}curl\left(\{curl^d(A)\}^2\right) = \frac{1}{2}\left\{curl\{curl^d(A)\}curl^d(A) + curl^d(A)curl\{curl^d(A)\}\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\{Lap(A)curl^d(A) + curl^d(A)Lap(A)\} = \frac{1}{2}\{Jcurl^d(A) + curl^d(A)J\}$$

주의할 점은 $Jcurl^d(A) + curl^d(A)J$의 항들 중에서 1-vector 항만이 힘이다. 힘은 $eng(A)$의 크기, 즉 scalar $eng^d(A)$의 $curl$이기 때문이다.

다시 힘은 에너지 밀도가 연속하지 않는 곳, $Lap(A) = J \neq 0$인 곳, 즉 $curl(A)$가 연속하지 않는 곳, 입자가 있는 곳에 생긴다.

전자기력부터 확인하자. 그리고 다른 차원의 vector field 로 확장하자.

A. electromagnetic force

4.1 에서 $curl^d(A)$는 2-vector 이고 J는 3-vector 이다. 그리고 5.J 에서 그 두 vector field 의 곱셈은 commutative 하다. 전하밀도와 전류밀도가 $curl^d(A)$와 작용하여 힘이 발생한다.

$$eng^d(A) = \frac{1}{2}\{curl^d(A)\}^2, \qquad F = -curl\{eng^d(A)\} = -Jcurl^d(A)$$

$$J = -J_t(e^1 \wedge e^2 \wedge e^3) - J_1(e^2 \wedge e^3 \wedge e^t) - J_2(e^3 \wedge e^1 \wedge e^t) - J_3(e^1 \wedge e^2 \wedge e^t)$$

$$curl^d(A) = E^d + B^d = E_1(e^2 \wedge e^3) + E_2(e^3 \wedge e^1) + E_3(e^1 \wedge e^2)$$
$$-B_1(e^1 \wedge e^t) - B_2(e^2 \wedge e^t) - B_3(e^3 \wedge e^t)$$

$$F_1 e^1 = J_t(e^1 \wedge e^2 \wedge e^3)E_1(e^2 \wedge e^3)$$
$$-J_3(e^1 \wedge e^2 \wedge e^t)B_2(e^2 \wedge e^t)$$
$$-J_2(e^3 \wedge e^1 \wedge e^t)B_3(e^3 \wedge e^t) = (-J_tE_1 + J_2B_3 - J_3B_2)e^1 \qquad 5.K$$

$$F_t e^t = J_1(e^2 \wedge e^3 \wedge e^t)E_1(e^2 \wedge e^3)$$
$$J_2(e^3 \wedge e^1 \wedge e^t)E_2(e^3 \wedge e^1)$$
$$J_3(e^1 \wedge e^2 \wedge e^t)E_3(e^1 \wedge e^2) = (-J_1E_1 - J_2E_2 - J_3E_3)e^t$$

관행적 표현. 여기서 $F_t e^t$는 마찰로 시간당 없어지는 전자기 에너지이다.

$$F = -J_tE + J \times B = \rho E + J \times B, \qquad F_t = -J \cdot E$$

B. weak force

4.2 에서 $curl^d(\mathcal{B} + \mathcal{E})$는 1-vector 이고 $\mathcal{J}$는 2-vector 이다. 그리고 이 곱셈은 anti-commutative 하다. 힘은 상쇄된다. spin 밀도와 spin current 밀도가 $curl^d(\mathcal{B} + \mathcal{E})$와 작용하여 힘이 발생한다.

약력은 힘 자체가 약한 것이 아니라 힘이 상쇄되는 것이다. 기하학적 특성이다. 그리고 $F_t e^t$도 0 이므로 마찰 등으로 없어지는 에너지도 없다.

힘이 상쇄된다는 것이 힘이 없다는 것은 아니다. 아마 용수철 양쪽을 반대 방향으로 누르거나 당기는 것과 같을 것이다. 약력에는 용수철이 꼭 필요하다.

그래도 용수철의 양쪽에서 누르거나 당기는 힘을 합해보자.

$$eng^d(A) = -\frac{1}{2}\{curl^d(\mathcal{B} + \mathcal{E})\}^2, \qquad F = \mathcal{J}curl^d(\mathcal{B} + \mathcal{E})$$

$curl^d(\mathcal{B} + \mathcal{E})$는 1-vector 이라 다른 차원과 부호가 다르다.

$$\mathcal{J} = \mathcal{K} + \mathcal{L}$$

$$\mathcal{K} = -\mathcal{K}_1(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) - \mathcal{K}_2(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1) - \mathcal{K}_3(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) + \mathcal{L}_2(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t) + \mathcal{L}_3(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)$$

$$curl^d(\mathcal{B} + \mathcal{E}) = -\mathcal{A}_1\mathbb{e}^1 - \mathcal{A}_2\mathbb{e}^2 - \mathcal{A}_3\mathbb{e}^3 - \mathcal{A}_t\mathbb{e}^t$$

$$F_1\mathbb{e}^1 = \mathcal{L}_1(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)\mathcal{A}_t\mathbb{e}^t - \mathcal{K}_2(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1)\mathcal{A}_3\mathbb{e}^3 - \mathcal{K}_3(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)\mathcal{A}_2\mathbb{e}^2$$

$$= (-\mathcal{L}_1\mathcal{A}_t + \mathcal{K}_2\mathcal{A}_3 - \mathcal{K}_3\mathcal{A}_2)\mathbb{e}^1 \qquad 5.K$$

관행적 표현

$$F = -\mathcal{L}\mathcal{A}_t + \mathcal{K} \times \mathcal{A}$$

C. strong force

4.3 에서 $curl^d(\mathbb{A})$는 scalar 이고 $\mathbb{J}$는 1-vector 이다. 두 vector field 의 곱은 commutative 하다. color 밀도와 Higgs 밀도가 $curl^d(\mathbb{A})$와 작용하여 힘이 발생한다.

$$eng^d(\mathbb{A}) = \frac{1}{2}\{curl^d(\mathbb{A})\}^2, \qquad F = -\mathbb{J}curl^d(\mathbb{A})$$

$$\mathbb{J} = \mathbb{J}_1\mathbb{e}^1 + \mathbb{J}_2\mathbb{e}^2 + \mathbb{J}_3\mathbb{e}^3 + \mathbb{J}_t\mathbb{e}^t, \qquad curl^d(\mathbb{A}) = \mathbb{V}$$

$$F_1\mathbb{e}^1 = -\mathbb{J}_1\mathbb{e}^1\mathbb{V} = -\mathbb{V}\mathbb{J}_1\mathbb{e}^1, \qquad F_t\mathbb{e}^t = -\mathbb{J}_t\mathbb{e}^t\mathbb{V} = -\mathbb{V}\mathbb{J}_t\mathbb{e}^t$$

관행적 표현

$$F = -\mathbb{V}\mathbb{J}, \qquad F_t = -\mathbb{V}\mathbb{J}_t$$

수식으로는 color 밀도 자체가 힘이고, Higgs 밀도는 시간당 없어지는 에너지로 보인다.

D. gravitational force

4.4 에서 $curl^d(v)$는 3-vector 이고 j는 pseudoscalar 이다. 두 vector field 의 곱은 commutative 하다. mass 밀도와 $curl^d(v)$와 작용하여 힘이 발생한다.

$$eng^d(v) = \frac{1}{2}\{curl^d(v)\}^2, \qquad F = -jcurl^d(v)$$

$$j = -mI$$

$$curl^d(v) = -a_t(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) - a_1(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) - a_2(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) - a_3(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t)$$

$$F_1\mathbb{e}^1 = -mIa_1(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) = -ma_1\mathbb{e}^1 = m(-\partial_1 v)\mathbb{e}^1 \qquad 5.E$$

$$F_t\mathbb{e}^t = -mIa_t(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) = -ma_t\mathbb{e}^t = m(-\partial_t v)\mathbb{e}^t$$

관행적 표현

$$F = -ma = -m(\nabla v), \qquad F_t = -m = -m(\partial_t v)$$

4.4.에서 m은 pseudoscalar 차원이다. 에너지 밀도 차원이기도 하다. 잘 아는 운동에너지 $mv^2/2$와 위치에너지 mgh에서 m이 에너지 밀도이고 속도 v와 중력가속도와 높이의 곱 gh는 단지 시간과 길이의 비(ratio)로 해석하는 게 맞다. 운동량 mv도 그렇다. 운동량보존 법칙이 아니라 또 하나의 에너지보존 법칙이다.

오류를 찾길 바란다. 그리고 없으면 믿어라.